Module Sémantique
TD 2 : Points fixes

Correction

Définition 1: *Espace métrique*.
Un espace métrique $(\mathbb{E}, d)$ est un espace $\mathbb{E}$ muni d'une distance d vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{E} \;\; d(x,y) \geq 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{E} \;\; d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall x, y \in \mathbb{E} \;\; d(x,y) = 0 \iff x = y$
4. $\forall x, y, z \in \mathbb{E} \;\; d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Définition 2: *Suite de Cauchy*.
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\mathbb{E}, d)$ est dite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \mid \forall n, p \geq N, d(u_p, u_n) \leq \epsilon$$

Un espace métrique $(\mathbb{E}, d)$ est dit **complet** si et seulement si toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$ de Cauchy converge dans $\mathbb{E}$.

1. Donner un exemple d'espace métrique. Est-il complet ?

$(\mathbb{N}, |x-y|)$, $(\mathbb{R}, |x-y|)$

Définition 3: *Fonctions Lipschitziennes*.
Une fonction f sur un espace métrique $(\mathbb{E}, d)$ est dite Lipschitzienne de rapport k si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \;\; d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x,y)$$

2. Donner un exemple de fonction Lipschitzienne.

Fonctions linéaires...

On note $\mathbb{D} = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'espace des fonctions des entiers vers les entiers. On définit sur $\mathbb{D}$ une distance d telle que, si g et h sont des fonctions vérifiant

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & g(0) \\ & \vdots & \\ h(N) & = & g(N) \\ h(N+1) & \neq & g(N+1) \end{array}$$

alors $d(g,h) = 1/2^{N+1}$, et si $g = h$ alors $d(g,h) = 0$.

3. Nous allons prouver que $(\mathbb{D}, d)$ est un espace métrique complet.

3. 1. Montrer que $(\mathbb{D}, d)$ est un espace métrique.

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
4. $d(x,z) = \frac{1}{2^{A+1}}$, $d(y,z) = \frac{1}{2^{B+1}}$ On suppose $A \geq B$, alors $d(x,y) = \frac{1}{2^{B+1}} \leq \frac{1}{2^{A+1}} + \frac{1}{2^{B+1}}$

3. 2. Nous allons maintenant prouver qu'il est complet.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy sur (D, d).

3.2.1. En utilisant la définition 2, montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **croissante** telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geq g(n),\ \ d(f_p, f_q) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Trouvons $g(n)$

(f_n) est de Cauchy. Soit la suite $\epsilon_n = 1/2^{n+1}$.
À n fixé, il existe K_n tel que $\forall p,q \geq K_n,\ \ d(f_p, f_q) \leq \epsilon_n$
On pose $g(n) = Min\{K_n | K_n$ vérifie la relation au dessus $\}$

g croissante :

Soient $a < b$
$\forall p,q \geq g(b),\ \ d(f_p, f_q) \leq \frac{1}{2^{b+1}} \leq \frac{1}{2^{a+1}}$
or $g(a)$ est le plus petit indice vérifiant cette relation
donc $g(a) \leq g(b)$

On définit la fonction $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ F(n) = f_{g(n)}(n)$$

3.2.2. Montrer, par récurrence forte sur n, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq g(n), \forall k \leq n,\ \ F(k) = f_p(k)$$

Par récurrence forte sur n.

1. $n = 0$:
   On a $\forall p, q \geq g(0),\ d(f_p, f_q) \leq 1/2$, i.e. $f_p(0) = f_q(0)$.
   Or en posant $q = g(0)$ on a $f_p(0) = f_{g(0)}(0) = F(0)$.
2. On suppose la propriété vraie $\forall k < n$, soit $p \geq g(n)$
   $p \geq g(n-1)$ donc $\forall k \leq n-1,\ F(k) = f_p(k)$
   $F(n) = f_{g(n)}(n)$ et on sait que $\forall p, q \geq g(n),\ \ d(f_p, f_q) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$
   donc en prenant $q = g(n), d(f_p, f_{g(n)}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$
   donc notamment $f_p(n) = f_{g(n)}(n) = F(n)$
   Finalement $\forall k \leq n\ \ f_p(k) = F(k)$.

3.2.3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq g(n), d(F, f_p) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

$\forall k \leq n,\ F(k) = f_p(k) \implies d(F, f_p) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

3.2.4. Montrer que F est la limite de la suite f_n. En déduire que $(\mathbb{D}, d)$ est un espace métrique complet.

Soit $\epsilon > 0$, il existe k tq $1/2^{k+1} \leq \epsilon$
En prenant $N = g(k)$ on a $\forall p \geq N,\ d(F, f_p) \leq \epsilon$ donc F est la limite de (f_n)
Toute suite de Cauchy de $(\mathbb{D}, d)$ admet donc une limite dans $\mathbb{D}$, donc $(\mathbb{D}, d)$ est un espace métrique complet.

Soit $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ définie par

$$(\Phi(f))(n) = \text{if } (n = 0) \text{ then } 1 \text{ else } n \times f(n-1)$$

4. Nous allons montrer que Φ est lipschitzienne.

4. 1. Montrer que si $\forall p \leq n,\ f(p) = g(p)$, alors $\forall q \leq n+1,\ (\Phi(f))(q) = (\Phi(g))(q)$.

Par récurrence sur n :
- $n = 0$: $\Phi(f)(0) = \Phi(g)(0) = 1$ et $\Phi(f)(1) = f(1) = g(1) = \Phi(g)(1)$
- Supposons la propriété vraie pour n, et $\forall p \leq n+1,\ f(p) = g(p)$
  On a donc $\forall q \leq n(\Phi(f))(q) = (\Phi(g))(q)$
  Et $\Phi(f)(n+1) = n \cdot f(n+1) = n \cdot g(n+1) = \Phi(g)(n+1)$

4. 2. En déduire que Φ est Lipschitzienne de rapport 1/2

$d(f,g) = 1/2^{n+1}$
$\Rightarrow\ \forall p \leq n,\ f(p) = g(p)$
$\Rightarrow\ \forall q \leq n+1,\ (\Phi(f))(q) = (\Phi(g))(q)$
$\Rightarrow\ d(\Phi(f),\Phi(g)) = 1/2 \cdot d(f,g)$
Si $d(f,g) = 0$ alors $f = g$ et $d(\Phi(f),\Phi(g) = 0 \leq 1/2 \cdot d(f,g)$
Donc Φ est Lipschitzienne de rapport $1/2$.

5. Soit f_0 un élément quelconque de $\mathbb{D}$. Calculer $\Phi^i(f_0)(n)$ pour $i = 1,2,3$. Généraliser pour i quelconque. En déduire $\lim\limits_{i\to\infty} \Phi^i(f_0)$

$\lim_{i\to\infty} \Phi^i(f_0) = (f : n \mapsto n!)$

On définit Ψ par

$$\Psi(f)(n) = \text{if } (n = 0) \text{ then } 1 \text{ else } \lfloor \frac{f(n+1)}{n+1} \rfloor$$

6. Ψ est-elle lipschitzienne ? Que dire de $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n(f_0)$?

$d(f,g) = 1/2^{n+1} \Rightarrow \forall p \leq n\ f(p) = g(p)$ ET $f(n+1) \neq g(n+1)$
$\Rightarrow\ d(\Psi(f),\Psi(g)) = 1/2^n$
- Donc Ψ est Lipschitzienne de rapport 2
- Sa limite n'est pas définie

7. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème du point fixe :
Si Υ est lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur $(\mathbb{E}, d)$ un espace métrique complet, alors il existe un unique F tel que $\Upsilon(F) = F$ et

$$\forall f_0,\ F = \lim_{n\to\infty} \Upsilon^n(f_0)$$

Soit Υ une fonction Lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur un espace métrique complet $(\mathbb{E}, d)$,

7. 1. Montrer que tout point fixe de Υ est unique.

Soient f et g deux points fixes de Υ,
$d(f,g) \leq k \cdot d(\Upsilon(f),\Upsilon(g)) = k \cdot d(f,g)$
Si $d(f,g) \neq 0$ alors $k \geq 1$ ce qui est absurde, donc $d(f,g) = 0$
$\Rightarrow\ f = g$ donc tout point fixe de Υ est unique.

Soit $f_0 \in \mathbb{E}$, on définit la suite $f_n = \mathrm{Y}^n(f_0)$.

7. 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ d(f_n, f_0) \leq d(f_1, f_0)/(1-k)$

$d(f_n, f_0) \leq \sum_{i=1}^{n} d(f_i, f_{i-1})$
Or $d(f_i, f_{i-1}) \leq k^{i-1} \cdot d(f_1, f_0)$
Donc $d(f_n, f_0) \leq \sum_{i=1}^{n}(k^{i-1} \cdot d(f_1, f_0)) = d(f_1, f_0) \cdot \frac{(1-k^n)}{1-k}$
Or $(1-k^n) \leq 1$
$\Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N},\ d(f_n, f_0) \leq d(f_1, f_0)/(1-k)$

7. 3. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

Soit $\epsilon > 0$, choisissons N tel que $k^N \cdot d(f_1, f_0)/(1-k) \leq \epsilon$
Soient $N \leq p \leq n$
$d(f_n, f_p) \leq k^p \cdot d(f_{n-p}, f_0) \leq k^p \cdot d(f_1, f_0)/(1-k) \leq k^N \cdot d(f_1, f_0)/(1-k) \leq \epsilon$
$\Rightarrow$ (f_n) est de Cauchy.

7. 4. Conclure la preuve du théorème

(f_n) est une suite de Cauchy sur un espace métrique complet, donc elle converge.
On note $F_0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Y}^n(f_0)$
Par définition, $\mathrm{Y}(F_0) = F_0$ donc F est LE point fixe de Y, F.
Ainsi, il existe un point fixe F, il est unique, et

$$\forall f_0, F = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Y}^n(f_0)$$